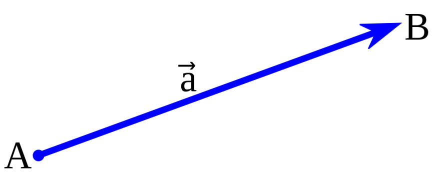
Tema 0: Vectores. Cinemática. Dinámica de la partícula

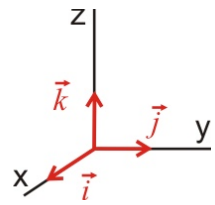
Vectores:

Un vector es la representación matemática de una magnitud vectorial. Consiste en un segmento orientado, que contiene toda la información sobre la magnitud que estamos midiendo.

Partes del vector

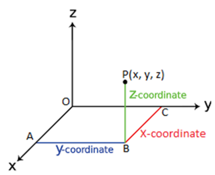
- Módulo: Longitud del segmento (valor de la magnitud: cantidad + unidades)
- Dirección: La de la recta en la que se encuentra el vector (llamada recta soporte)
- Sentido: Viene dado por la flecha. Dentro de la dirección, será + ó −, dependiendo del criterio que hayamos escogido en un principio.





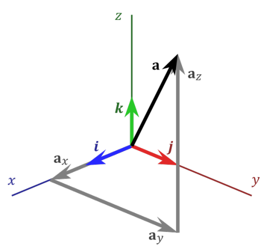
Sistema de referencia: un punto (0 , origen, punto desde el cual medimos)
tres vectores (perpendiculares y de módulo 1): $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Coordenadas de un punto: $P : (P_x, P_y, P_z)$



Componentes de un vector: $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$

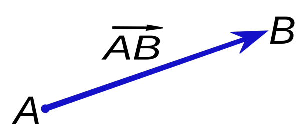
$$\overrightarrow{a} = (a_x + a_y + a_z)$$



Módulo de un vector: $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x + a_y + a_z}$

Vector unitario: $\overrightarrow{u}_a = \dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \dfrac{a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ $\qquad \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{u}_a$

Vector entre dos puntos: $\overrightarrow{PQ} : (Q_x - P_x, Q_y - P_y, Q_z - P_z)$

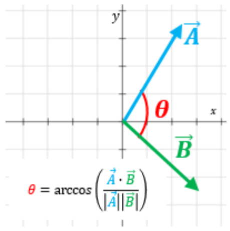


Producto escalar

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Ángulo entre dos vectores:

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$



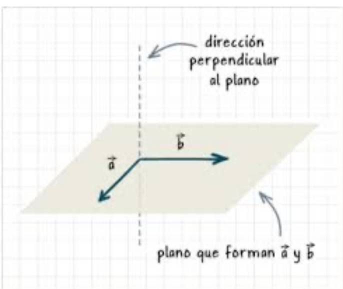
Producto vectorial

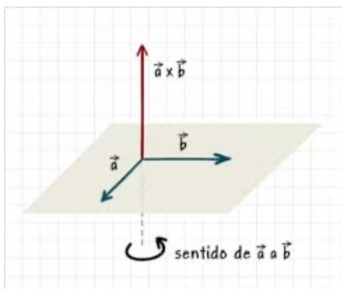
$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y)\,\overrightarrow{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x)\,\overrightarrow{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x)\,\overrightarrow{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

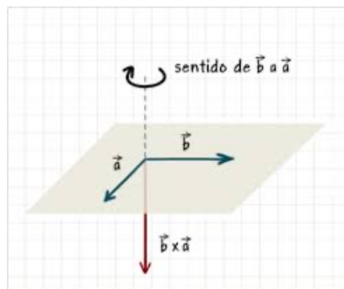
Módulo $\left|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot Sen\alpha$

Dirección: Perpendicular a ambos vectores

Sentido: regla del sacacorchos lo de la mano derecha) al girar desde $\overrightarrow{a}$ hasta $\overrightarrow{b}$







Derivadas: Dada $f\left(x\right)$

$$\frac{df\left(x\right)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

Propiedades fundamentales:

Suma
$$\frac{d\left(f_{(x)}\pm g_{(x)}\right)}{dx}=\frac{df\left(x\right)}{dx}\pm\frac{dg\left(x\right)}{dx}$$

La derivada de una suma (o diferencia) es la suma (o diferencia) de las derivadas

Producto por nº
$$\frac{d(k\cdot f\left(x\right))}{dx}=k\cdot\frac{df\left(x\right)}{dx}$$

Al multiplicar una función por un nº k, la derivada también se multiplica por k.

Producto
$$\frac{d\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)}{dx}=\frac{df\left(x\right)}{dx}\cdot g_{(x)}+f_{(x)}\cdot\frac{dg\left(x\right)}{dx}$$

Cociente
$$\frac{d\left(f\left(x\right)/g\left(x\right)\right)}{dx}=\frac{\frac{df\left(x\right)}{dx}\cdot g(x)-f\left(x\right)\cdot\frac{dg\cdot x,}{dx}}{\left(g\left(x\right)\right)^2}$$

Derivada de un vector: para derivar una magnitud vectorial. $\overrightarrow{a}$ cualquiera, se derivan sus componentes por separado.

$$\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\cdot\overrightarrow{i}+\frac{da_y}{dt}\cdot\overrightarrow{j}+\frac{da_z}{dt}\cdot\overrightarrow{k}$$

Integrales indefinidos: una función F(x) es la función integral (o función primitiva) de otra función f(x) cuando f(x) se obtiene al derivar F(x).

Algunas propiedades:

$$\int \left[f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right] dx = \int f\left(x\right) dx \pm \int g(x)dx$$

La integral de una suma (o diferencia) es la suma (o diferencia) de las integrales

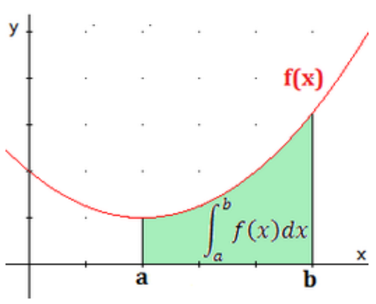
$$\int k \cdot f\left(x\right) dx = k \int f\left(x\right) dx$$

Al multiplicar una función por un nº k cualquiera, la integral también se ve multiplicada por el mismo nº

Integrales definidas: $\int_A^B f\left(x\right) \cdot dx$

El resultado de realizar una integral indefinida no es una función, sino un número real.
Se calcula mediante la Regla de Barrow:

1º Se calcula la integral indefinida
2º Se sustituye los valores de los extremos superior e inferior.
    Obtenemos F(B) y F (A)
3º HacemosF(B)-F (A)



Cinemática:

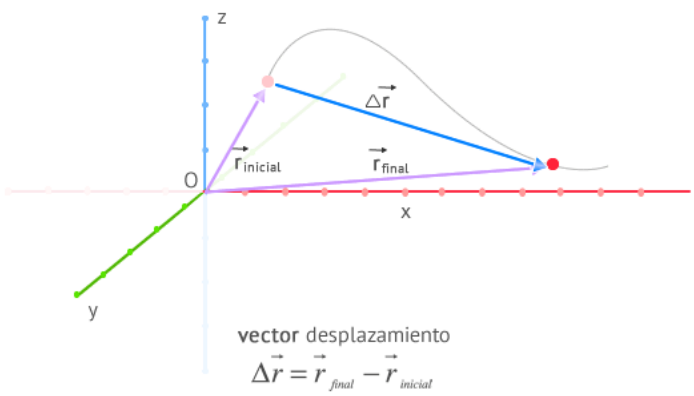
Vector de posición

Indica las coordenadas del móvil en cada instante
También llamada *ecuación de movimiento*

$$\vec{r}\,(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r}\,(t) = (X, Y, Z)$$

Vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$



Velocidad: Indica como varía la posición del movil con respecto al tiempo.

Velocidad media $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ Medida en un intervalo $\Delta t = t - t_0$

Velocidad instantánea: Indica cómo cambia $\vec{r}$ con el tiempo en cada instante.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad [v] = \frac{m}{S} = m \cdot S^{-1}$$

Aceleración: Indica cómo cambia $\vec{v}$ con el tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad [a] = \frac{m/s}{S} = m \cdot S^{-2}$$

Componentes intrínsecos de la aceleración:

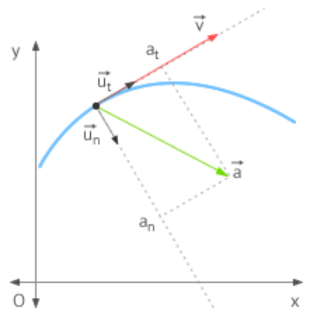
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

ac.tangencial $\vec{a}_t = \dfrac{d\,|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{u}_t$ modifica $|\vec{v}|$ $\quad a_t = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$

ac. normal $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n$ modifica la dirección de $|\vec{v}|$ $\quad a_n = \dfrac{v^2}{R}$

R = radio de curvatura $\quad \vec{u}_t = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vector unitario tangente



Movimientos de especial interés:

Mov. rectilíneo uniforme (MRU):

$$\vec{a} = 0; \vec{v} = cte \quad ; \quad \boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v} \cdot t}$$

La trayectoria es siempre una línea recta.

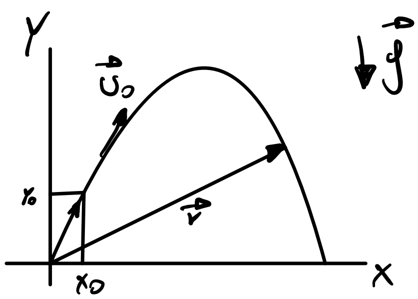
Mov. Uniformemente acelerado (MUA):

$$\vec{a} = cte \quad — \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \\ \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \end{array}}$$

La trayectoria puede ser
- Recta: Si $\vec{v_0}$ y $\vec{a}$ son paralelas (MRUA)
- Curva (parabólica): si $\vec{v_0}$ y $\vec{a}$ no son paralelas

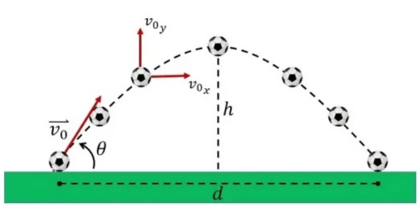
Tiro parabólico:

$$\vec{a} = \vec{g} \simeq -10 \vec{j}\, m/s^2 \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad — \quad \boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{array}}$$



$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{g} \cdot t \quad — \quad \boxed{\begin{array}{l} v_x = v_{ox} = cte \\ v_y = v_{oy} - g \cdot t \end{array}}$$

Descomposición de $\vec{v}$



$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$v_{oy} = v_0 \cdot sen\alpha$$

Mov. circular uniforme (MCU):

Movimiento con $a_t = 0; a_n = cte \rightarrow R = cte$

Posición angular: $\theta = \theta_0 + \omega t$ $\quad [\theta] = rad$

Velocidad angular: $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = cte$ $\quad [\omega] = rad \cdot s^{-1}$

Periodo: Tiempo en dar una vuelta $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\quad [T] = S$

Frecuencia: n° de vueltas por segundo

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad [v] = S^{-1} = Hz$$

Aceleración

$$a = a_n = \omega \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

Mov. circular unif. Acelerado (MCUA):

$\theta = \theta + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$ $\quad a_t = \alpha \cdot R$

ω varía con $\alpha = cte$ (aceleración angular)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$[\alpha] = rad \cdot s^{-2}$

Dinámica de la partícula

Leyes de Newton

1° Ley de la inercia — Todo cuerpo tiende a estar en reposo o movimiento rectilíneo uniforme a no ser que actue una fuerza externa

2° Ley $\left(\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}\right)$ La sumatoria de las fuerzas es directamente proporcional a la masa por la aceleración

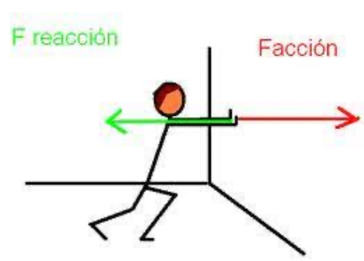
$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{v} = cte$$

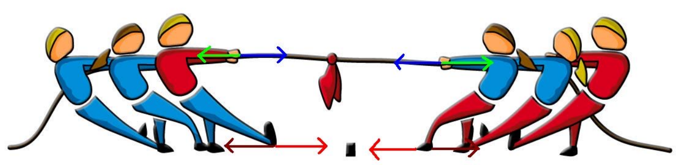
Misma dirección y sentido

3° Principio de acción-reacción — En la interacción entre dos cuerpos, se genera dos fuerzas; igual y opuesta

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\vec{F}_{21}$$

Misma módulo y dirección, sentidos contrarios





Fuerza de especial interés:

Peso:

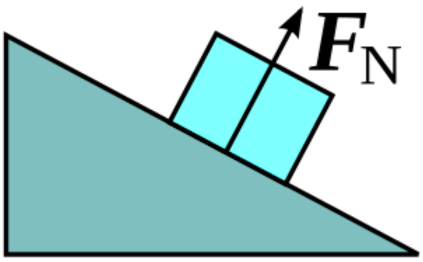
Fuerza que ejerce la Tierra (o el planeta que se esta estudiando) sobre un cuerpo. Su dirección y sentido apuntan hacia el centro del planeta.

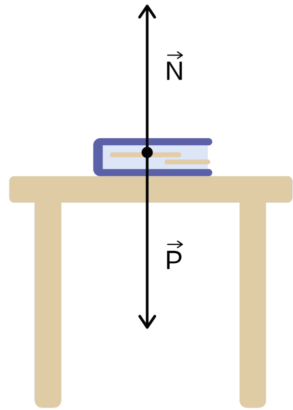
$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

Normal:

Respuesta del plano a todas las fuerzas perpendiculares a él.

Cálculo: $\sum \vec{F_y} = 0$

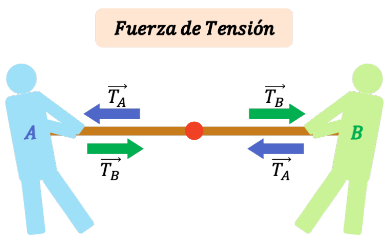




Tensión:

Fuerza que ejerce un hilo tenso sobre sus extremos

Para una misma cuerda, el valor de T es el mismo en ambos extremos

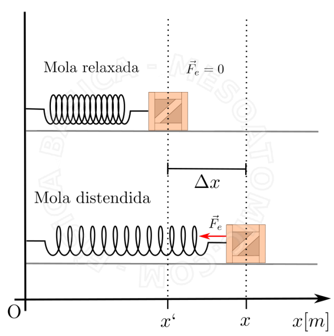


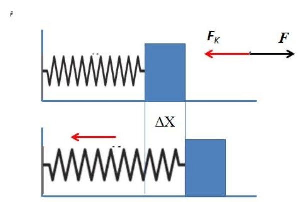
Fuerza elástica:

$$\vec{F_e} = -k \cdot \vec{\Delta x}$$

La ejercen los cuerpos elásticos sobre sus extremos.

Es proporcional al desplazamiento y se opone a éste.





Fuerza de rozamiento:

Debido a la rugosidad de las superficies en contacto

F ROZ. estática: Mientras el cuerpo no se mueve $F_R = F_{aplicada}$

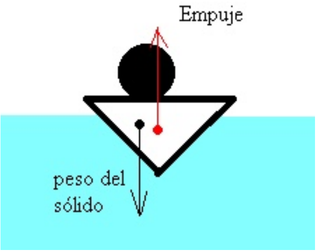
En el límite $F_{RsMAX} = \mu_S \cdot N$

F Roz. dinámica: Cuando se produce un desplazamiento $F_R = \mu \cdot N$

Empuje de Arquímedes:

Fuerza vertical ejercida por un fluido (líquido o gas) sobre un cuerpo sumergido en él.

$$E = V_{sum} \cdot d_{fluido} \cdot g$$



Sistemas de referencia inerciales y no inerciales:

<u>un sistema de referencia es inercial:</u> si está en reposo o se mueve con MRU $(\overrightarrow{v} = cte)$ respecto a una sistema de referencia que esté en reposo.
Un observador situado en un SR inercial mide correctamente las fuerzas aplicadas sobre los cuerpos y aplica correctamente las leyes de Newton

<u>un sistema de referencia es no inercial</u> si se mueve con aceleración respecto a un SR en reposo. Debido a esta aceleración, un observador situado en él mide efectos que puede explicar con las leyes de Newton. Debe inventarse fuerza que no son reales, no las aplica ningún cuerpo (las llamamos" fuerzas de inercia")

Ejemplos:

-Un autobús que fuera bruscamente.
Los pasajeros notan "un empujón" hacia delante.
- El autobús toma una curva pronunciada. Los pasajeros notan una "fuerza centrífuga" hacia fuera de la curva.
-Los astronautas de una nave espacial en órbita notan ingravidez, como si la Tierra no ejerciera fuerza.
-Todo objeto que se mueva en la superficie de la Tierra nota una “fuerza hacia la derecha" en el hemisferio norte y “hacia la izquierda" en el hemisferio sur (así se forman las borrascas, huracanes, remolinos...)

Cantidad de movimiento:

Indica la intensidad de un movimiento $\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{v}$

$$[P] = kg \cdot m \cdot S^{-1}$$

La cantidad de movimiento varia debido a la acción de las fuerzas que actúen sobre el cuerpo.

Conservación: Si $\sum \overrightarrow{F} = 0 \rightarrow \overrightarrow{p} = cte$ $\quad \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}$

Impulso: Indica el efecto que tiene la aplicación de una fuerza durante un intervalo de tiempo.

$$\overrightarrow{I} = \int \overrightarrow{F} \cdot dt$$

Si $\overrightarrow{F} = cte$ $\quad \overrightarrow{I} = \overrightarrow{F} \cdot \Delta t = \Delta \overrightarrow{p}$

$$[I] = N \cdot s$$

Presión. Hidrostatica

Presión (P): Fuerza ejercida por unidad de superficie. $P = \frac{F}{S}$ $\quad [P] = N \cdot m^{-2} = pascal\,(Pa)$

La presión que ejerce un sólido sobre una superficie se debe a la fuerza de contacto (normal) sobre la misma.

Presión en fluidos. Ecuación fundamental de la hidrostática:

La presión en un punto de un fluido en reposo depende sólo de la densidad del fluido y de la profundidad respecto a la superficie libre del fluido.

$$P = d \cdot g \cdot h$$

Principio de Pascal:

Cuando se aplica una presión en un punto de un líquido, ésta se transmite a todo el líquido con rapidez y prácticamente sin disminuir su intensidad en todas las direcciones.

Presión en los gases. Presión atmosférica:

Para una cierta cantidad de un gas ideal, la presión que ejerce esta relacionada con el volumen y la temperatura.

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \qquad n = n^0 moles$$

$$R = 0,082 atm \cdot L/k \cdot mol = 8,31 J/k \cdot mol$$

En toda transformación del gas, se cumple $\frac{P \cdot V}{T} = cte \rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$

La presión atmosférica media al nivel del mar es de:

$$1atm = 760mmHg = 101,3kPa = 1,013bar = 98000Kp/cm^2$$

Esta presión disminuye con la altura.

Dinámica de fluidos. Teorema de Bernoulli:

En un fluido en movimiento (por ej. que circula por una tubería) la presión que ejerce depende de su velocidad y de la altura.

Se cumple la ecuación de Bernoulli $P + d \cdot g \cdot h + \frac{d \cdot v^2}{2} = cte$